





# **ΣΥΝΘΕΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΦΥΣΙΚΗΣ**

***Νεκτάριος Τσιλιβίγκος***

***Μάιος 2021***

**ISBN**

---

**ΝΕΚΤΑΡΙΟΣ ΤΣΙΛΙΒΙΓΚΟΣ**

**ΣΥΝΘΕΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΦΥΣΙΚΗΣ**

**ΑΘΗΝΑ 2021**



## ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το παρόν βιβλίο περιέχει μία συλλογή προβλημάτων Φυσικής που σχετίζονται με την ύλη που διδάσκεται στην Α Λυκείου. Τα περισσότερα από αυτά απαιτούν σύνθετο χειρισμό των εννοιών της Φυσικής και σε ορισμένες περιπτώσεις ιδιαίτερες μαθηματικές τεχνικές.

Το πρώτο μέρος του, βιβλίου περιέχει τις εκφωνήσεις των προβλημάτων. Κάθε πρόβλημα συνοδεύεται με τις κατάλληλες υποδείξεις που αναδεικνύουν κρυφά και δύσκολα σημεία στην αντιμετώπισή του. Το δεύτερο μέρος περιέχει τις αναλυτικές τους λύσεις.

Το βιβλίο απευθύνεται σε μαθητές που θέλουν να αντιμετωπίσουν κάτι το ξεχωριστό και πιο δύσκολο από την τυπική σχολική ύλη. Φιλοδοξεί να αποτελέσει πολύτιμο βοηθό του σε πιθανή προετοιμασία για διαγωνισμούς Φυσικής.

Κάθε παρατήρηση ή υπόδειξη για το περιεχόμενό του θα γίνει δεκτή με ιδιαίτερη χαρά.

Νεκτάριος Τσιλιβίγκος

[tsilnek@gmail.com](mailto:tsilnek@gmail.com)





## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

	Σελίδα
Εκφωνήσεις – Υποδείξεις Προβλημάτων .....	<b>13</b>
Λύσεις Προβλημάτων .....	<b>117</b>
Βιβλιογραφία .....	<b>284</b>

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Ανά Πρόβλημα

Εκφ.	Λύση	Εκφ.	Λύση	Εκφ.	Λύση
Πρ. <b>1</b> . . . . . 15 . . . . .	119	Πρ. <b>34</b> . . . . . 49 . . . . .	169	Πρ. <b>67</b> . . . . . 82 . . . . .	228
Πρ. <b>2</b> . . . . . 16 . . . . .	120	Πρ. <b>35</b> . . . . . 50 . . . . .	171	Πρ. <b>68</b> . . . . . 83 . . . . .	229
Πρ. <b>3</b> . . . . . 18 . . . . .	122	Πρ. <b>36</b> . . . . . 51 . . . . .	172	Πρ. <b>69</b> . . . . . 84 . . . . .	231
Πρ. <b>4</b> . . . . . 19 . . . . .	123	Πρ. <b>37</b> . . . . . 52 . . . . .	174	Πρ. <b>70</b> . . . . . 85 . . . . .	233
Πρ. <b>5</b> . . . . . 20 . . . . .	125	Πρ. <b>38</b> . . . . . 53 . . . . .	175	Πρ. <b>71</b> . . . . . 86 . . . . .	234
Πρ. <b>6</b> . . . . . 21 . . . . .	126	Πρ. <b>39</b> . . . . . 54 . . . . .	177	Πρ. <b>72</b> . . . . . 87 . . . . .	235
Πρ. <b>7</b> . . . . . 22 . . . . .	127	Πρ. <b>40</b> . . . . . 55 . . . . .	179	Πρ. <b>73</b> . . . . . 88 . . . . .	237
Πρ. <b>8</b> . . . . . 23 . . . . .	129	Πρ. <b>41</b> . . . . . 56 . . . . .	182	Πρ. <b>74</b> . . . . . 89 . . . . .	238
Πρ. <b>9</b> . . . . . 24 . . . . .	130	Πρ. <b>42</b> . . . . . 57 . . . . .	182	Πρ. <b>75</b> . . . . . 90 . . . . .	239
Πρ. <b>10</b> . . . . . 25 . . . . .	132	Πρ. <b>43</b> . . . . . 58 . . . . .	184	Πρ. <b>76</b> . . . . . 91 . . . . .	241
Πρ. <b>11</b> . . . . . 26 . . . . .	133	Πρ. <b>44</b> . . . . . 59 . . . . .	186	Πρ. <b>77</b> . . . . . 92 . . . . .	243
Πρ. <b>12</b> . . . . . 27 . . . . .	134	Πρ. <b>45</b> . . . . . 60 . . . . .	188	Πρ. <b>78</b> . . . . . 93 . . . . .	244
Πρ. <b>13</b> . . . . . 28 . . . . .	135	Πρ. <b>46</b> . . . . . 61 . . . . .	189	Πρ. <b>79</b> . . . . . 94 . . . . .	245
Πρ. <b>14</b> . . . . . 29 . . . . .	136	Πρ. <b>47</b> . . . . . 62 . . . . .	191	Πρ. <b>80</b> . . . . . 95 . . . . .	247
Πρ. <b>15</b> . . . . . 30 . . . . .	138	Πρ. <b>48</b> . . . . . 63 . . . . .	192	Πρ. <b>81</b> . . . . . 96 . . . . .	249
Πρ. <b>16</b> . . . . . 31 . . . . .	139	Πρ. <b>49</b> . . . . . 64 . . . . .	195	Πρ. <b>82</b> . . . . . 99 . . . . .	251
Πρ. <b>17</b> . . . . . 32 . . . . .	141	Πρ. <b>50</b> . . . . . 65 . . . . .	197	Πρ. <b>83</b> . . . . . 99 . . . . .	252
Πρ. <b>18</b> . . . . . 33 . . . . .	142	Πρ. <b>51</b> . . . . . 66 . . . . .	199	Πρ. <b>84</b> . . . . . 99 . . . . .	254
Πρ. <b>19</b> . . . . . 34 . . . . .	144	Πρ. <b>52</b> . . . . . 67 . . . . .	200	Πρ. <b>85</b> . . . . . 100 . . . . .	256
Πρ. <b>20</b> . . . . . 35 . . . . .	146	Πρ. <b>53</b> . . . . . 68 . . . . .	202	Πρ. <b>86</b> . . . . . 101 . . . . .	258
Πρ. <b>21</b> . . . . . 36 . . . . .	148	Πρ. <b>54</b> . . . . . 69 . . . . .	204	Πρ. <b>87</b> . . . . . 102 . . . . .	259
Πρ. <b>22</b> . . . . . 37 . . . . .	149	Πρ. <b>55</b> . . . . . 70 . . . . .	206	Πρ. <b>88</b> . . . . . 103 . . . . .	261
Πρ. <b>23</b> . . . . . 38 . . . . .	151	Πρ. <b>56</b> . . . . . 71 . . . . .	207	Πρ. <b>89</b> . . . . . 104 . . . . .	263
Πρ. <b>24</b> . . . . . 39 . . . . .	153	Πρ. <b>57</b> . . . . . 72 . . . . .	209	Πρ. <b>90</b> . . . . . 105 . . . . .	264
Πρ. <b>25</b> . . . . . 40 . . . . .	154	Πρ. <b>58</b> . . . . . 73 . . . . .	212	Πρ. <b>91</b> . . . . . 106 . . . . .	265
Πρ. <b>26</b> . . . . . 41 . . . . .	155	Πρ. <b>59</b> . . . . . 74 . . . . .	214	Πρ. <b>92</b> . . . . . 107 . . . . .	267
Πρ. <b>27</b> . . . . . 42 . . . . .	156	Πρ. <b>60</b> . . . . . 75 . . . . .	217	Πρ. <b>93</b> . . . . . 108 . . . . .	269
Πρ. <b>28</b> . . . . . 43 . . . . .	158	Πρ. <b>61</b> . . . . . 76 . . . . .	218	Πρ. <b>94</b> . . . . . 109 . . . . .	270
Πρ. <b>29</b> . . . . . 44 . . . . .	160	Πρ. <b>62</b> . . . . . 77 . . . . .	220	Πρ. <b>95</b> . . . . . 110 . . . . .	273
Πρ. <b>30</b> . . . . . 45 . . . . .	161	Πρ. <b>63</b> . . . . . 78 . . . . .	222	Πρ. <b>96</b> . . . . . 111 . . . . .	273
Πρ. <b>31</b> . . . . . 46 . . . . .	163	Πρ. <b>64</b> . . . . . 79 . . . . .	224	Πρ. <b>97</b> . . . . . 112 . . . . .	274
Πρ. <b>32</b> . . . . . 47 . . . . .	165	Πρ. <b>65</b> . . . . . 80 . . . . .	226	Πρ. <b>98</b> . . . . . 113 . . . . .	277
Πρ. <b>33</b> . . . . . 48 . . . . .	167	Πρ. <b>66</b> . . . . . 81 . . . . .	227	Πρ. <b>99</b> . . . . . 114 . . . . .	278
				Πρ. <b>100</b> . . . . . 115 . . . . .	280

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑ ΚΕΦΑΛΑΙΟ

### **ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ**

*(Είδη κινήσεων, εξισώσεις κίνησης, ελεύθερη πτώση, κατακόρυφη κίνηση υπό την επίδραση του βάρους)*

1, 3, 4, 5, 11, 12, 13, 17, 24, 29\*, 35, 36, 37\*, 41, 49\*\*, 50, 51\*\*, 52\*, 60, 65, 68\*, 73, 74, 98, 99\*, 100\*\*.

### **ΔΥΝΑΜΙΚΗ**

*(Δυνάμεις, σύνθεση και ανάλυση δυνάμεων, νόμοι Νεύτωνα και εφαρμογές τους στην κίνηση)*

2\*, 6, 7, 8\*, 14, 15, 16\*, 20, 22, 23\*\*, 25, 27, 28, 30\*, 31, 32, 33, 34\*, 38\*, 39\*, 40\*, 45, 53, 54, 55, 56\*, 57\*, 58\*, 59, 63, 66, 67\*, 69, 71, 72, 77\*, 78\*, 79\*\*, 80, 81, 82, 83\*, 84\*, 85, 86, 87\*, 88\*, 89, 90, 91\*, 92\*, 93, 95, 97\*.

### **ΕΡΓΟ – ΕΝΕΡΓΕΙΑ – ΙΣΧΥΣ**

*(Υπολογισμός έργου, θεώρημα μεταβολής κινητικής ενέργειας, διατήρηση μηχανικής ενέργειας, διατήρηση ενέργειας, ισχύς)*

9, 10\*, 18, 19, 21\*, 26, 42, 43\*, 44, 46\*, 47\*, 48, 61, 62, 64, 70, 75\*, 76, 94\*, 96.

\* Αυξημένου βαθμού δυσκολίας.

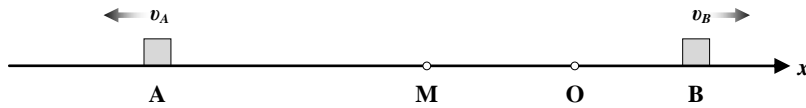
\*\* Υπερβολικά αυξημένου βαθμού δυσκολίας.



**Εκφωνήσεις – Υποδείξεις  
Προβλημάτων**



## 1. Το είδος της κίνησης του μέσου M.



Από σημείο  $O$  του οριζώντιου άξονα  $x'ox$  ξεκινούν ταυτόχρονα 2 υλικά σημεία  $A$  και  $B$ , κινούμενα ομαλά επιταχυνόμενα κατά μήκος του άξονα, σε κατευθύνσεις αντίθετες μεταξύ τους, με σταθερές επιταχύνσεις μέτρων  $a_A = 6 \text{ m/s}^2$  και  $a_B = 2 \text{ m/s}^2$  αντίστοιχα.

**A)** Να αποδείξετε ότι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος  $AB$  κατά τη διάρκεια της κίνησης των  $A$  και  $B$  εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

**B)** Να υπολογίσετε την επιτάχυνσή του.

### Υποδείξεις

- Καθώς το σημείο  $A$  κινείται με μεγαλύτερη επιτάχυνση από το  $B$ , η απόσταση  $OA$  που θα έχει διανύσει σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή θα είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη  $OB$  που θα έχει διανύσει το  $B$ . Άρα το μέσο  $M$  του  $AB$  θα είναι αριστερά του σημείου εκκίνησης  $O$ , και θα κινείται συνεχώς προς τ' αριστερά.
- Αρκεί να αποδείξετε ότι το  $(OM)$  είναι ανάλογο του τετραγώνου του χρόνου κίνησης των παραπάνω υλικών σημείων.

## 2. Ελάχιστη οριζόντια δύναμη ώστε να κινηθεί το σώμα.

Σώμα μάζας  $m = 5 \text{ kg}$  και αμελητέων διαστάσεων ισορροπεί σε οριζόντιο επίπεδο. Ο συντελεστής στατικής τριβής ανάμεσα στην επιφάνεια του σώματος και το επίπεδο είναι  $\mu_{\sigma} = 0,5$ .

**A)** Υπολογίστε το μέτρο της ελάχιστης οριζόντιας δύναμης  $F$  που πρέπει να ασκήσουμε στο σώμα για να το θέσουμε σε κίνηση.

**B)** Υπολογίστε το μέτρο της ελάχιστης δύναμης  $F$  που πρέπει να ασκήσουμε στο σώμα, (όχι απαραίτητα οριζόντιας), για να το θέσουμε σε κίνηση.

**Γ)** Ποια γωνία σχηματίζει η δύναμη  $F$  με το οριζόντιο επίπεδο σ' αυτή την περίπτωση;

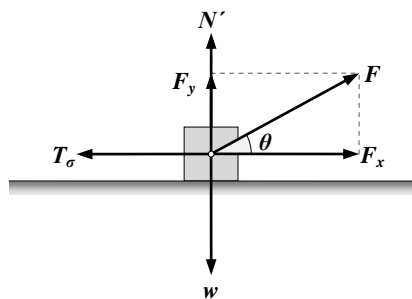
Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

### Υποδείξεις

- Σε κάθε περίπτωση η δύναμη που ασκείται στο σώμα στον άξονα κίνησης πρέπει να είναι μεγαλύτερη της μέγιστης δύναμης της στατικής τριβής που ασκείται σε αυτό.

Υπάρχει όμως μικρότερη δύναμη ικανή να μετατοπίσει το σώμα από αυτή που υπολογίζουμε στο (A) ερώτημα;

- Μη ξεχνάτε πως η μέγιστη δύναμη της στατικής τριβής δίνεται από τη σχέση:  $T_{\sigma p} = \mu_{\sigma} N$ , όπου  $N$  η κάθετη δύναμη που ασκεί η επιφάνεια στο σώμα. Θα μπορούσαμε να κινήσουμε το σώμα με τη βοήθεια μικρότερης δύναμης  $F$ , αρκεί να μειωθεί το μέτρο της δύναμης  $N$ . Πως μπορεί να γίνει αυτό; Μεταβάλλοντας κατάλληλα τη διεύθυνση της δύναμης  $F$ . Στο σχήμα φαίνεται η πιθανή διεύθυνση της  $F$  και η νέα δύναμη  $N'$  που ασκεί η επιφάνεια του εδάφους στο σώμα.



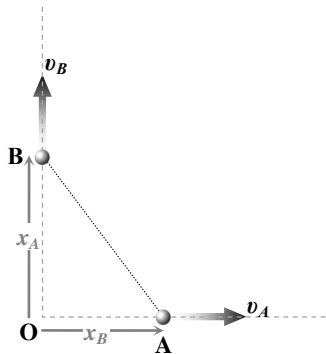


Από την ισορροπία στον κατακόρυφο άξονα  $y'y$  έχουμε:

$$\Sigma F_y = 0 \text{ άρα } N' + F_y = w \text{ ή } N' = w - F_y \text{ (} w: \text{ το βάρος του σώματος)}$$

- Προσπαθήστε να υπολογίσετε την δύναμη  $F$  θεωρώντας προφανώς πως η οριζόντια συνιστώσα της στον άξονα κίνησης  $x'x$  έχει μεγαλύτερο μέτρο από την  $T_{op}$ . Μη ξεχνάτε πως:  $F^2 = F_x^2 + F_y^2$ .

### 3. Σχηματισμός ορθογωνίου τριγώνου.



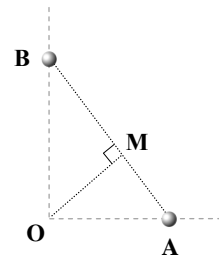
Από το σημείο  $O$  του σχήματος ξεκινούν ταυτόχρονα 2 υλικά σημεία  $A$  και  $B$ , κινούμενα ομαλά επιταχυνόμενα με επιταχύνσεις μέτρων  $a_A = 1 \text{ m/s}^2$  και  $a_B = \sqrt{3} \text{ m/s}^2$  αντίστοιχα σε διευθύνσεις κάθετες μεταξύ τους όπως φαίνεται στο σχήμα.

**A)** Σε πόσο χρόνο θα απέχουν  $AB = 16 \text{ m}$ ;

**B)** Το σημείο  $O$  σχηματίζει με τα  $A$  και  $B$  ορθογώνιο τρίγωνο  $OAB$ . Αποδείξτε ότι αν  $OM$  το ύψος του ορθογωνίου τριγώνου  $OAB$ , το  $M$  εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση και υπολογίστε το μέτρο της επιτάχυνσής του.

#### Υποδείξεις

- Το ευθύγραμμο τμήμα  $AB$  είναι η υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου  $OAB$ .
- Αρκεί να αποδείξουμε πως το  $OM$  αυξάνεται ανάλογα με το τετράγωνο του χρόνου.



## 4. Υπολογισμός μέσης ταχύτητας σε τμήμα διαδρομής.

Υλικό σημείο εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα  $v_0$  και σταθερή επιτάχυνση  $a$ .

**A)** Αποδείξτε ότι αν σε χρόνο  $\Delta t$  έχει αποκτήσει ταχύτητα  $v$ , τότε η μέση ταχύτητά του δίνεται από τη σχέση:  $v_\mu = \frac{v_0 + v}{2}$

**B)** Αν για τα πρώτα χρονικά διαστήματα κίνησής του  $\Delta t_\alpha = \Delta t_\beta = \Delta t_\gamma$ , οι μέσες ταχύτητές του είναι  $v_\alpha = 6 \text{ m/s}$ ,  $v_\beta$  και  $v_\gamma = 14 \text{ m/s}$ , υπολογίστε την  $v_\beta$  καθώς και την αρχική ταχύτητα  $v_0$  του κινητού.

### Υποδείξεις

- Η μέση ταχύτητα του κινητού υπολογίζεται από τη σχέση:  $v_\mu = \frac{x}{t}$ , όπου  $x$  η μετατόπισή του σε χρόνο  $t$ .
- Για κάθε χρονικό διάστημα όπου η ταχύτητα μεταβάλλει την τιμή της από  $v_{\text{αρχ}}$  σε  $v_{\text{τελ}}$  η μέση ταχύτητα δίνεται από τη σχέση:  $v_\mu = \frac{v_{\text{αρχ}} + v_{\text{τελ}}}{2}$
- Προσπαθήστε να σχηματίσετε τις σχέσεις των μέσων ταχυτήτων  $v_\alpha$ ,  $v_\beta$  και  $v_\gamma$  και να τις συγκρίνετε μεταξύ τους.

## 5. Μεταβαλλόμενη κίνηση και ελάχιστος χρόνος κίνησης

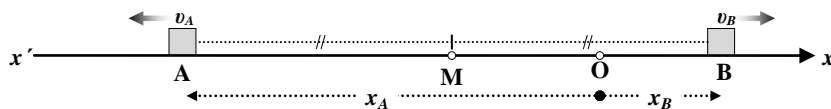
Υλικό σημείο κινούμενο ευθύγραμμα ομαλά με ταχύτητα μέτρου  $v$  περνά τη χρονική στιγμή  $t = 0$  από σημείο Α, διανύει απόσταση  $x = 9 \text{ m}$  ως το σημείο Β και στη συνέχεια επιβραδύνεται ομαλά με επιβράδυνση μέτρου  $a = 4 \text{ m/s}^2$  μέχρι να σταματήσει.

Υπολογίστε το μέτρο της ταχύτητας  $v$  του κινητού στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση ώστε ο συνολικός χρόνος κίνησής του να είναι ο ελάχιστος δυνατός.

### Υποδείξεις

- Η συνολική κίνηση χωρίζεται σε 2 στάδια. Στο πρώτο στάδιο το κινητό διανύει απόσταση  $x = 9 \text{ m}$  κινούμενο ευθύγραμμα ομαλά με ταχύτητα  $v$ , ενώ στο δεύτερο στάδιο επιβραδύνεται ομαλά μέχρι να σταματήσει.
- Αν η ταχύτητα του κινητού στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση είναι μεγάλη, θα διανύσει την απόσταση των  $9 \text{ m}$  γρήγορα αλλά θα χρειαστεί αρκετό χρόνο μέχρι να σταματήσει.
- Αν η ταχύτητα του κινητού στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση είναι μικρή, θα διανύσει την απόσταση των  $9 \text{ m}$  πιο αργά αλλά θα χρειαστεί λιγότερο χρόνο μέχρι να σταματήσει.
- Προσπαθήστε να αναπτύξετε τη μαθηματική έκφραση του ολικού χρόνου κίνησης και να εντοπίσετε την τεχνική που απαιτείται ώστε να τον ελαχιστοποιήσετε.

1.



**A)** Από το σχήμα:  $OM = OA - AM = OA - \frac{AB}{2} = OA - \frac{OA + OB}{2}$

Όμως η απόσταση  $OA$  είναι ίση με την μετατόπιση του σημείου  $A$ , και η απόσταση  $OB$  ίση με την μετατόπιση του σημείου  $B$ .

Άρα:  $OA = \frac{1}{2}\alpha_A t^2$  και  $OB = \frac{1}{2}\alpha_B t^2$  οπότε:

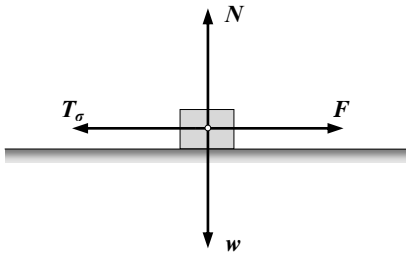
$$\begin{aligned} OM &= \frac{1}{2}\alpha_A t^2 - \frac{\frac{1}{2}\alpha_A t^2 + \frac{1}{2}\alpha_B t^2}{2} = \frac{1}{2}\alpha_A t^2 - \frac{1}{4}\alpha_A t^2 - \frac{1}{4}\alpha_B t^2 = \\ &= \frac{1}{4}\alpha_A t^2 - \frac{1}{4}\alpha_B t^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\alpha_A - \frac{1}{2}\alpha_B\right)t^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_A - \alpha_B}{2}\right)t^2 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι το  $OM$  είναι ανάλογο του τετράγωνου του χρόνου κίνησης  $t$ . Άρα το σημείο  $M$  εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα.

**B)** Από τη σχέση:  $OM = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_A - \alpha_B}{2}\right)t^2$  συμπεραίνουμε πως το σημείο  $M$  κινείται με σταθερή επιτάχυνση μέτρου:

$$\alpha_M = \frac{\alpha_A - \alpha_B}{2} = \frac{6 - 2}{2} = 2 \text{ m/s}^2$$

## 2.



**A)** Στο σώμα ασκούνται, το βάρος του  $w$ , η κάθετη δύναμη  $N$  από την επιφάνεια, η οριζόντια δύναμη  $F$  που επιχειρεί να το μετακινήσει, καθώς και η στατική τριβή που το κρατά ακίνητο.

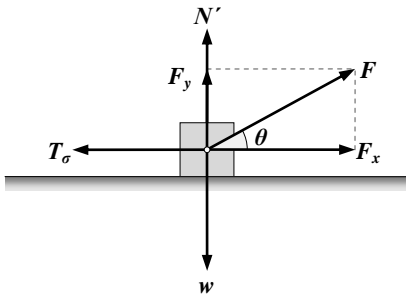
Από την ισορροπία του σώματος στον κατακόρυφο άξονα  $y'y$  έχουμε:

$$\Sigma F_y = 0 \quad \text{ή} \quad N = w = mg = 50 \text{ N}$$

Άρα το μέγιστο μέτρο της στατικής τριβής είναι ίσο με:  $T_{op} = \mu_\sigma N = 25 \text{ N}$

Για να μετακινηθεί το σώμα αρκεί:  $F > T_{op}$  ή  $F > 25 \text{ N}$

Δεχόμαστε ότι:  $F_{min} = 25 \text{ N}$



**B)** Η νέα δύναμη  $F$  σχηματίζει γωνία  $\theta$  με το οριζόντιο επίπεδο όπως φαίνεται στο σχήμα.

Από την ισορροπία του σώματος στον κατακόρυφο άξονα  $y'y$  έχουμε:

$$\Sigma F_y = 0 \quad \text{ή} \quad N' = w - F_y$$

Άρα η νέα τιμή της  $T_{op}$  είναι:  $T_{op} = \mu_\sigma N' = \mu_\sigma (w - F_y)$

Για την ελάχιστη τιμή της  $F$  δεχόμαστε ότι:  $F_x = T_{op} = \mu_\sigma (w - F_y)$  (1)

Όμως:  $F^2 = F_x^2 + F_y^2$  ή  $F_x^2 = F^2 - F_y^2$

Άρα, από την (1):

$$F_x^2 = \mu_\sigma^2 (w - F_y)^2 \quad \text{ή} \quad F^2 - F_y^2 = \mu_\sigma^2 (w^2 + F_y^2 - 2wF_y) \quad \text{ή}$$

$$\mu_\sigma^2 w^2 + \mu_\sigma^2 F_y^2 - 2\mu_\sigma^2 wF_y - F^2 + F_y^2 = 0 \quad \text{ή}$$

$$(\mu_\sigma^2 + 1) F_y^2 - 2\mu_\sigma^2 wF_y + \mu_\sigma^2 w^2 - F^2 = 0 \quad (2)$$

Έχουμε μια δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς τη μεταβλητή  $F_y$  η οποία έχει σίγουρα λύση. Αρα η διακρίνουσά της είναι:

$$\Delta \geq 0 \quad \text{ή} \quad 4\mu_\sigma^4 w^2 - 4(\mu_\sigma^2 + 1) \cdot (\mu_\sigma^2 w^2 - F^2) \geq 0 \quad \text{ή}$$

$$4\mu_\sigma^4 w^2 - 4(\mu_\sigma^4 w^2 - \mu_\sigma^2 F^2 + \mu_\sigma^2 w^2 - F^2) \geq 0 \quad \text{ή}$$

$$4\mu_\sigma^4 w^2 - 4\mu_\sigma^4 w^2 + 4\mu_\sigma^2 F^2 - 4\mu_\sigma^2 w^2 + 4F^2 \geq 0 \quad \text{ή}$$

$$4F^2 (\mu_\sigma^2 + 1) \geq 4\mu_\sigma^2 w^2 \quad \text{ή} \quad F^2 \geq \frac{\mu_\sigma^2 w^2}{1 + \mu_\sigma^2}$$

Αρα:  $F_{min} = \frac{\mu_\sigma w}{\sqrt{1 + \mu_\sigma^2}} = \frac{0,5 \cdot 50}{\sqrt{1 + 0,5^2}} = \frac{25}{\sqrt{1,25}} \quad \text{ή} \quad F_{min} = 10\sqrt{5} \text{ N}$

**Γ)** Επιστρέφοντας στη δευτεροβάθμια εξίσωση της σχέσης **(2)** έχουμε:

$$1,25 F_y^2 - 25F_y + 125 = 0 \quad \text{ή} \quad F_y^2 - 20 F_y + 100 = 0$$

Η διακρίνουσα της παραπάνω εξίσωσης είναι:  $\Delta = (-20)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 100 = 0$ , οπότε:

$$F_y = \frac{20}{2 \cdot 1} \quad \text{ή} \quad F_y = 10 \text{ N}$$

Από τη σχέση  $F^2 = F_x^2 + F_y^2$  έχουμε:

$$F_x^2 = F^2 - F_y^2 = 500 - 100 = 400 \quad \text{ή} \quad F_x = 20 \text{ N}$$

Αρα:  $\varepsilon\varphi\theta = \frac{F_y}{F_x} = 0,5 \quad \text{ή} \quad \theta = 26,56^\circ$

### 3.

**A)** Οι εξισώσεις κίνησης για τα υλικά σημεία A και B είναι:

$$x_A = \frac{1}{2} \alpha_A t^2 \quad \text{και} \quad x_B = \frac{1}{2} \alpha_B t^2$$

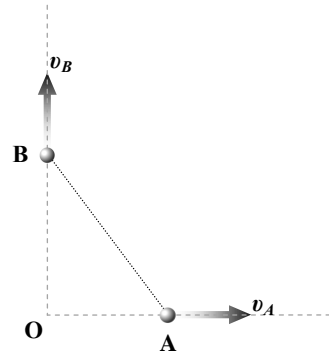
Από το ορθογώνιο τρίγωνο OAB:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 \quad \text{ή}$$

$$AB^2 = x_A^2 + x_B^2 \quad \text{ή}$$

$$AB^2 = \left(\frac{1}{2} \alpha_A t^2\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \alpha_B t^2\right)^2 = \left(\frac{1}{2} 1 t^2\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \sqrt{3} t^2\right)^2 = t^4 \quad (\text{S.1.})$$

Άρα:  $16 = t^2$  (S.1.)    ή     $t = 4 \text{ s}$



**B)** Το ευθύγραμμο τμήμα OM είναι κάθετος του ορθογωνίου τριγώνου OAM.

Από το ορθογώνιο τρίγωνο OAB:  $\varepsilon\varphi\theta = \frac{OB}{OA} = \sqrt{3}$

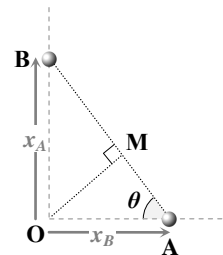
Άρα:  $\theta = 60^\circ$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο OAM:  $\eta\mu\theta = \frac{OM}{OA}$

Άρα:  $OM = OA \cdot \eta\mu\theta = \frac{1}{2} \alpha_A t^2 \cdot \eta\mu\theta = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} t^2$  (S.1.)

Άρα το M εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα και με

επιτάχυνση μέτρου:  $\alpha_M = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ m/s}^2$





## 4.

**A)** Η μέση ταχύτητα δίνεται από τη σχέση:  $v_\mu = \frac{x}{t}$ , όπου  $x$  η μετατόπιση του κινητού σε χρόνο  $t$ .

Στη συγκεκριμένη κίνηση: 
$$v_\mu = \frac{v_0 t + \frac{at^2}{2}}{t} = v_0 + \frac{1}{2}at$$

Όμως:  $v = v_0 + at$

Αρα: 
$$v_\mu = \frac{2v_0 + at}{2} = \frac{v_0 + v_0 + at}{2} \quad \text{ή} \quad v_\mu = \frac{v_0 + v}{2}$$

**B)** Στο τέλος κάθε χρονικού διαστήματος  $\Delta t_\alpha$ ,  $\Delta t_\beta$  και  $\Delta t_\gamma$ , ( $\Delta t_\alpha = \Delta t_\beta = \Delta t_\gamma = \Delta t$ ), το κινητό έχει αποκτήσει ταχύτητες:

$$v_1 = v_0 + a \cdot \Delta t$$

$$v_2 = v_1 + a \cdot \Delta t = v_0 + 2a \cdot \Delta t$$

$$v_3 = v_2 + a \cdot \Delta t = v_0 + 3a \cdot \Delta t$$

Άρα οι μέσες ταχύτητες  $v_\alpha$ ,  $v_\beta$  και  $v_\gamma$  δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$v_\alpha = \frac{v_0 + v_1}{2} = \frac{2v_0 + a\Delta t}{2} \quad (1)$$

$$v_\beta = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{2v_0 + 3a\Delta t}{2} \quad (2)$$

$$v_\gamma = \frac{v_2 + v_3}{2} = \frac{2v_0 + 5a\Delta t}{2} \quad (3)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (3):

$$\frac{v_\alpha}{v_\gamma} = \frac{6}{14} \quad \text{ή} \quad \frac{2v_0 + a\Delta t}{2v_0 + 5a\Delta t} = \frac{6}{14} \quad \text{ή}$$

$$14 \cdot (2v_0 + a\Delta t) = 6 \cdot (2v_0 + 5a\Delta t) \quad \text{ή} \quad 16v_0 = 16a\Delta t \quad \text{ή} \quad v_0 = a\Delta t$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2):

$$\frac{v_\alpha}{v_\beta} = \frac{2v_0 + a\Delta t}{2v_0 + 3a\Delta t} = \frac{2v_0 + v_0}{2v_0 + 3v_0} = \frac{3v_0}{5v_0} = \frac{3}{5}$$

Αρα: 
$$\frac{6}{v_\beta} = \frac{3}{5} \quad (\text{s.l.}) \quad \text{ή} \quad v_\beta = 10 \text{ m/s}$$

Όμως:  $v_\beta = \frac{2v_o + 3\alpha\Delta t}{2} = \frac{2v_o + 3v_o}{2} = \frac{5}{2}v_o$

Άρα:  $\frac{5}{2}v_o = 10 \text{ m/s}$  ή  $v_o = 4 \text{ m/s}$

## 5.

Ο χρόνος κίνησης του σώματος στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση είναι  $t_1$ .

$$x = v \cdot t_1 \quad \text{ή} \quad t_1 = \frac{x}{v}$$

Ο χρόνος που απαιτείται για να μηδενιστεί η ταχύτητα του σώματος στην ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση υπολογίζεται ως εξής:

$$v_{\text{τελ}} = v - \alpha \cdot t_2 \quad \text{ή} \quad 0 = v - \alpha \cdot t_2 \quad \text{ή} \quad t_2 = \frac{v}{\alpha}$$

Άρα ο συνολικός χρόνος κίνησης είναι:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{x}{v} + \frac{v}{\alpha} \quad \text{ή} \quad t = \frac{9}{v} + \frac{v}{4} \quad (\text{S.I.}).$$

Αν απαλείψουμε τους παρανομαστές: ( $\times 4v$ )

$$4v \cdot t = 36 + v^2 \quad \text{ή} \quad v^2 - 4t \cdot v + 36 = 0 \quad (\text{S.I.}) \quad \mathbf{(1)}$$

Έχουμε μια δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς την άγνωστη ταχύτητα  $v$ , η οποία έχει σίγουρα λύση. Άρα:

$$\Delta \geq 0 \quad \text{ή} \quad (4t)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36 \geq 0 \quad \text{ή} \quad 16t^2 \geq 144 \text{ s}^2 \quad \text{ή}$$

$$t^2 \geq 9 \text{ s}^2 \quad \text{ή} \quad t \geq 3 \text{ s} \quad \text{ή} \quad t_{\min} = 3 \text{ s}$$

Επιστρέφοντας στην εξίσωση **(1)**:

$$v^2 - 12v + 36 = 0 \quad (\text{S.I.})$$

$$\Delta = (-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36 = 0$$

$$\text{Άρα:} \quad v = \frac{-12}{2 \cdot 1} \text{ m/s} \quad \text{ή} \quad v = 6 \text{ m/s}$$